Correction Baccalauréat S - Spé. Maths
Polynésie - 7 Juin 2013

www.math93.com

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Étude de la fonction f.

a. Intersections avec les axes du repère.
Les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère sont les solutions des systèmes :

– Pour $\mathscr{C} \cap (Ox)$: $\left\{\begin{array}{lll} y & = & 0 \\ y & = & f(x) \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lll} y & = & 0 \\ y & = & (x+2)\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$ or $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} > 0$ d'où : $\left\{\begin{array}{lll} y & = & 0 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$

Donc $\boxed{\mathscr{C} \cap (Ox) = \{A(-2\,;\,0)\}}$.

– Pour $\mathscr{C} \cap (Oy)$: $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ y & = & f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ y & = & f(0) = 2 \end{array}\right.$

Donc $\boxed{\mathscr{C} \cap (Oy) = \{B(0\,;\,2)\}}$.

b. Limite en $+\infty$.
On a :
– $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$;
– $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées.
Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$, **La courbe $\mathscr{C}$ admet comme asymptote l'axe des abscisses en** $+\infty$.

Limite en $-\infty$.
On a :
– $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$;
– $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) \times \mathrm{e}^{-x} = -\infty$.
Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

c. Variation de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Donc f est dérivable comme produit de fonctions qui le sont. On obtient alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Soit $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}}$.
Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$ et de ce fait on peut dresser le tableau de variations.
On a $-x-1 > 0 \iff x < -1$ donc $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,;\,-1[$, nulle en -1 et négatif sur $]-1\,;\,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1) = \mathrm{e}$	$\searrow$	0

2. a. **Valeur approchée du résultat de l'algorithme à 10^{-3} près**.
L'algorithme permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles, c'est à dire : $\boxed{S = \dfrac{1}{4}f(0) + \dfrac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(\frac{2}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1,642}$ à 10^{-3} près.

b. On découpe l'intervalle $[0~;~1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des rectangles ainsi construits.
En découpant en N intervalles, chaque intervalle a une longueur de $\dfrac{1}{N}$ et on fait varier k de 0 à $N-1$ ce qui donne l'algorithme :

Variables	k est un nombre entier S est un nombre réel
Initialisation	Affecter à S la valeur 0 Saisir N
Traitement	Pour k variant de 0 à $N-1$ Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N}f\left(\dfrac{k}{N}\right)$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

3. a. **Calcule de l'aire**.
On admet que la fonction g, définie sur l'intervalle $]-\infty~;~+\infty[$ par $g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$,est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Sur l'intervalle $[0~;~1]$, le tableau de variation montre que $f(x) \geq 0$ car f étant strictement décroissante sur cet intervalle on a $f([0~;~1]) = \left[f(1)~;~f(0)\right] = \left[3\mathrm{e}^{-1}~;~2\right]$.
De ce fait, l'aire exacte $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire est donnée par :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[g(x)\right]_0^1 = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -4\mathrm{e}^{-1} + 3\mathrm{e}^0$$

Soit $\boxed{\mathscr{A} = \left(3 - 4\mathrm{e}^{-1}\right) \text{ unités d'aire}}$.

b. **Erreur commise**.
On a $\boxed{S - \mathscr{A} \approx 0,114}$.

Exercice 2. **4 points**

Commun est tous les candidats

Cet exercice est un QCM.

1. $\boxed{\textbf{Réponse d}}$.
   Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **et** $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}$.
   La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ **est** $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{12}\right)}}$.
   En effet :
   $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$
   $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

2. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.
   L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet une infinité de solutions dont les points images sont situés sur une droite.
   En effet :
   $$\begin{array}{rclcl} -z=\overline{z} & \Longleftrightarrow & -(x+\mathrm{i}y) & = & x-\mathrm{i}y \\ & \Longleftrightarrow & -x-\mathrm{i}y & = & x-\mathrm{i}y \\ & \Longleftrightarrow & -x & = & x \\ -z=\overline{z} & \Longleftrightarrow & x & = & 0 \end{array}$$
   Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle c'est à dire l'ensemble des imaginaires purs.

3. $\boxed{\textbf{Réponse a}}$.
   Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{AB}(-2\,;\,3\,;\,1)$.
   Comme la droite considérée passe par le point $C(-1\,;\,0\,;\,4)$, une représentation paramétrique s'obtient directement :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1-2t \\ y & = & 3t \\ z & = & 4+t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

4. $\boxed{\textbf{Réponse b}}$.
   La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   - Un vecteur directeur $\overrightarrow{v_\Delta}$ de la droite Δ se lit directement à partir de la représentation paramétrique : $\overrightarrow{v_\Delta}(1\,;\,1\,;\,2)$.
   - On remarque déjà que $\overrightarrow{v_\Delta}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires ce qui **exclu la réponse a**.
   - Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{v_\Delta}(1\,;\,1\,;\,2)$ et $\vec{n}\,(3\,;\,-5\,;\,1)$ donne : $\overrightarrow{v_\Delta}.\vec{n} = 1\times3+1\times(-5)+2\times1 = 0$.
     Ainsi $\overrightarrow{v_\Delta}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux ce qui montre que la droite Δ est est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
     De ce fait, **la bonne réponse peut être b. ou d.**
     Pour trancher on regarde si la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   - Du plan $\mathscr{P}$, passant par le point $D\,(-1\,;\,2\,;\,3)$ on connait $\vec{n}\,(3\,;\,-5\,;\,1)$ un vecteur normal. Donc l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $3\times(x+1)-5\times(y-2)+1\times(z-3)=0$.
     Soit $\boxed{\mathscr{P} : 3x-5y+z+10=0}$.
     On sait que :
     $$|Delta : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7+t \\ y & = & 3+t \\ z & = & 5+2t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$
     Il reste alors à remplacer x, y et z par leur expression en fonction de t dans l'équation du plan pour voir si la droite y est incluse.

     $3(-7+t)-5(3+t)+(5+2t)+10 = -21 \neq 0$
     Donc la droite n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

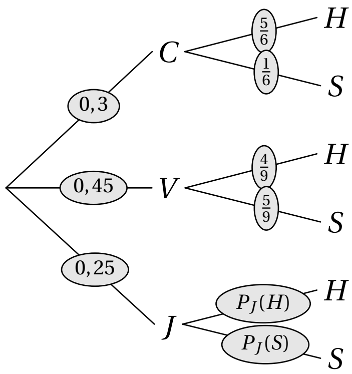
Exercice 3. **5 points**

Commun est tous les candidats

On considérera les événements suivants :
- C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
- V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;
- J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;
- H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
- S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

1. **Calculons la probabilité** $P(C \cap H)$.
   On va construire l'arbre de probabilités.



D'après la propriété des probabilités composées (principe de multiplication des probabilités sur les branches de l'arbre) on a :
$\boxed{P(C \cap H) = P_C(H) \times P(C) = \frac{5}{6} \times 0,3 = \frac{1}{4} = 25\%}$.

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

   a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?
   On a :
   – D'une part, $P(C \cap H) = 25\% = 0,25$;
   – D'autre part, $P(C) \times P(H) = 0,3 \times \frac{13}{20} = \frac{39}{200} = 0,195$.
   il n'y a donc pas égalité, $P(C \cap H) \neq P(C) \times P(H)$,
   et de ce fait, **les évènements C et H ne sont pas indépendants**.

   b. Calculons $P(J \cap H)$.
   Les événements C, V et J forment une partition de l'univers Ω donc la formule des probabilités totales donne :
   $$P(H) = P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H)$$
   En remplaçant par les données connues il vient :
   $$\begin{array}{ccccc} P(H) & = & \underbrace{0,25 + \frac{4}{9} \times 0,45} & + & P(J \cap H) \\ \frac{13}{20} & = & \frac{9}{20} & + & P(J \cap H) \end{array}$$
   De ce fait on a : $\boxed{P(J \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{9}{20} = \frac{4}{20}}$.

   Or $P(J \cap H) = P_J(H) \times P(J)$ donc $\boxed{P_J(H) = \frac{P(J \cap H)}{P(J)} = \frac{\frac{4}{20}}{0,25} = \frac{4}{5}}$.

Partie 2

Thomas écoute un morceau au hasard parmi les 60 morceaux de son MP3. On sait qu'il y a 30% de morceaux de musique classique.

1. **Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de** 95%.
   On a $n = 60$, $p = 30\%$ alors on sait que puisque $n = 60 \geq 30$, $np = 18 \geq 5$ et $n(1-p) = 42 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :
   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   soit $\boxed{I \approx [0{,}184\,045\ ;\ 0{,}415\,955] \approx [18,4\%\ ;\ 41,6\%] \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2. **La fonction lecture aléatoire est-elle défectueuse** ?
   La proportion de morceaux de musique classique observée sur l'échantillon de taille $n = 60$ de Thomas est $p = \frac{12}{60} = 0,2 = 20\%$.
   La proportion $p = 20\% \in I$, donc la fonction « lecture aléatoire » du lecteur ne semble pas être défectueuse.

Partie 3

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque chanson, associe sa durée exprimée en seconde. La variable X suit une loi normale de paramètres $m = 200$ et $\sigma = 20$.

1. **Calculons** $P(180 \leq X \leq 220)$ **à** 10^{-3} **près**.
   $P(180 \leq X \leq 220) = P(X \leq 220) - P(X \leq 180)$
   $P(180 \leq X \leq 220) = 0,841 - 0,159$
   Et donc $\boxed{P(180 \leq X \leq 220) \approx 0,682}$ à 10^{-3} près.

2. La probabilité qu'un morceau écouté dure plus de 4 minutes soit $4 \times 60 = 240$ s est :
   $P(X \geq 240) = 1 - P(X < 240)$
   $P(X \geq 240) = 1 - 0,977$
   Et donc $\boxed{P(X \geq 240) \approx 0,023 = 2,3\%}$ à 10^{-3} près.

Exercice 4. **5 points**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On a : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 = 300 \\ b_0 = 300 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

1. **a. Déterminons U_1.**
   $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{pmatrix}$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 = 300 \\ b_0 = 300 \end{pmatrix}$

   Et donc $\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} a_1 = 330 \\ b_1 = 282 \end{pmatrix}}$.

   b. Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.
   Pour tout entier naturel n on a :

   $M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

   $M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix}$

   Et donc :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+1} = M \times U_n + P}$.

2. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice identité.

   a. Calculons $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

   $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Et donc

   $\boxed{(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}$.

   b. Inverse de $I - M$.
   L'égalité précédente montre que la matrice $I - M$ est inversible et que son inverse est :

   $\boxed{(I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$.

   c. Déterminons la matrice U telle que $U = M \times U + P$.
   On cherche à déterminer la matrice U telle que :
   $U = M \times U + P \Longleftrightarrow U - M \times U = P$
   $U = M \times U + P \Longleftrightarrow (I - M) \times U = P$
   Or d'après la question 2b, la matrice $I - M$ est inversible et que son inverse est $(I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   De ce fait en multipliant les deux membres de l'égalité par $(I - M)^{-1}$ à gauche on obtient :
   $U = M \times U + P \Longleftrightarrow \underbrace{(I - M)^{-1} \times (I - M)}_{I} \times U = (I - M)^{-1} \times P$

   $U = M \times U + P \Longleftrightarrow I \times U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

   $U = M \times U + P \Longleftrightarrow U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

   Et donc : $\boxed{U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.

a. Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = M \times V_n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - U$,
et
$M \times V_n = M \times (U_n - U)$
$M \times V_n = M \times U_n - M \times U$
Or d'après la question 1b, $U_{n+1} = M \times U_n + P$ soit $U_{n+1} - P = M \times U_n$.
Et donc

$$M \times V_n = \underbrace{M \times U_n}_{} - M \times U$$
$$M \times V_n = U_{n+1} - P - M \times U$$
$$M \times V_n = U_{n+1} - \underbrace{(M \times U + P)}_{}$$
$$M \times V_n = U_{n+1} - U \quad \text{car d'après la question 2c, } U = M \times U + P$$
$$M \times V_n = \underbrace{U_{n+1} - U}_{}$$
$$M \times V_n = V_{n+1}$$

De ce fait, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{V_{n+1} = M \times V_n}$.

b. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n \times V_0$.
Par analogie avec une suite géométrique numérique (V_n) de raison $q = M$ et de premier terme V_0, on a immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{V_n = M^n \times V_0}$.
On peut aussi faire une démonstration par récurrence assez évidente.

4. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$

a. Exprimons U_n en fonction de n et déterminons la limite de la suite (a_n).

- **Exprimons U_n en fonction de n.**
  D'après la question 3), $U_n = V_n + U$ et donc : $U_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

  Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix}}$
- **Limite**.
  On sait que si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$; donc
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$;
  - et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$.

  De ce fait : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 380}$.

b. Le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme est donc de 380 milliers soit 380 000.